# Statistik im Überblick

**Stochastik** ist die Mathematik des Zufalls. Sie gliedert sich in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

Die **Wahrscheinlichkeitstheorie** untersucht zufällige Prozesse, die von als bekannt angenommenen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gesteuert werden.

In der **Statistik** werden aus empirisch gewonnenen Daten Hypothesen über unbekannte Wahrscheinlichkeitsgesetze überprüft.

## Mengenlehre

| | | |
|---|---|---|
| Kommutativgesetze | $A \cap B = B \cap A$ | $A \cap B = B \cup A$ |
| Assoziativgesetze | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| Distributivgesetze | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Absorptionsgesetze | $A \cap (A \cup B) = A$ | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| Idempotenzgesetze | $A \cap A = A$ | $A \cup A = A$ |
| Gesetze für die Komplementmenge | $A \cap A^C = \varnothing$ | $A \cup A^C = \Omega$ |
| De-Morgan-Gesetze | $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ | $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ |
| Neutrale Elemente | $A \cap \Omega = A$ | $A \cup \varnothing = A$ |
| Dominanzgesetze | $A \cap \varnothing = \varnothing$ | $A \cup \Omega = \Omega$ |
| Ø und Ω – Komplemente | $\varnothing^C = \Omega$ | $\Omega^C = \varnothing$ |
| Doppeltes Komplement | $(A^C)^C = A$ | |
| Gesetz für die Mengendifferenz | $A \setminus B = A \cap B^C$ | |
| Gesetze für die symmetrische Differenz | $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$<br>$A \Delta B = A^C \Delta B^C$<br>$(A \Delta B)^C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$ | |

## Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

| | | |
|---|---|---|
| Experiment | | Beliebig oft wiederholbarer Vorgang |
| Zufallsexperiment | | Experiment, dessen Ergebnis nicht vorhersagbar ist, da es vom Zufall abhängt |
| Versuch | | Einmalige Durchführung eines Experiments |
| Ergebnis | | Endzustand eines Versuchs |
| Ergebnisraum | Ω | Menge aller Elementarereignisse |
| Ereignis | A | Teilmenge des Ergebnisraums |
| Elementarereignis | ω | Einelementiges Ereignis |
| Ereignisraum | | Menge aller Ereignisse |
| Sicheres Ereignis | Ω | Beschreibt das immer eintretende Ereignis |
| Leere Menge | Ø | Beschreibt das sog. unmögliche Ereignis |
| Disjunkte Mengen | | Sich gegenseitig ausschließende Ereignisse |
| σ-Algebra | $\mathcal{A}$ | System von Teilmengen des Ergebnisraums |

## Relative Häufigkeit

| | |
|---|---|
| Mächtigkeit | $\|\Omega\| = card(\Omega) = n$ |
| Absolute Häufigkeit | $H(A)$ |
| Relative Häufigkeit | $h_n(A) = \frac{H(A)}{n}$ |

**Wichtigstes aus den Axiomen von Kolmogoroff (bzw. Folgerungen daraus)**

| | |
|---|---|
| $P(A^C) = 1 - P(A)$ | |
| $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | , gilt allgemein |
| $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ | , wenn A und B disjunkt |

## Kombinatorik

Beispiel: A:= {1,2,3,4}; n = 4; k = 2

| | |
|---|---|
| **Kombination ohne Zurücklegen**<br>$\|\Omega\| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$<br>*Beispiel*<br>Ω = { (1,2), (1,3), (1,4)<br>(2,3), (2,4)<br>(3,4)<br>}<br>$\|\Omega\| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ | **Kombination mit Zurücklegen**<br>$\|\Omega\| = \binom{n+k-1}{k}$<br>*Beispiel*<br>Ω = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)<br>(2,2), (2,3), (2,4)<br>(3,3), (3,4)<br>(4,4) }<br>$\|\Omega\| = \binom{4+2-1}{2} = 10$ |
| **Variation ohne Zurücklegen**<br>$\|\Omega\| = \frac{n!}{(n-k)!}$<br>*Beispiel*<br>Ω = { (1,2), (1,3), (1,4)<br>(2,1), (2,3), (2,4)<br>(3,1), (3,2), (3,4)<br>(4,1), (4,2), (4,3) }<br>$\|\Omega\| = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$<br>*Spezialfall*<br>für k = n gilt, $\|\Omega\| = n!$ (Permutation) | **Variation mit Zurücklegen**<br>$\|\Omega\| = N^k$<br>*Beispiel*<br>Ω = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)<br>(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)<br>(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)<br>(4,1), (4,2), (4,3), (4,4) }<br>$\|\Omega\| = 4^2 = 16$ |

**Zum Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$ Außerdem gilt: $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$ und $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{n-1}$$

**Geometrische Reihe**

$$\sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{1-p^{i+1}}{1-p}$$

## Paradoxon der ersten Kollision

$$P(X_n \le k) = 1 - \frac{n!}{n^k * (n-k)!} = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \frac{j}{n})$$

**Schätzformel für den 50%-Wert**

$$1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \le P(X_n \le k) \le 1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}}$$

*Beispiele:*

**Geburtstagsparadoxon**

Bereits bei 23 Personen ist die Wahrscheinlichkeit über 50%, dass 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

$$P(X_{365} \le 23) = 1 - \frac{365!}{365^{23} * (365-23)!} = 1 - \prod_{j=1}^{23-1} (1 - \frac{j}{365}) = 0{,}5073$$

**Wiederholung der Lottozahlen**

Schon nach 3016 Ausspielungen trat beim Lotto 1995 die Wiederholung einer Zahlenreihe auf. Dabei gibt es fast 14 Millionen Zahlenkombinationen für eine Ausspielung.

$$P(X_{\binom{49}{6}} \le 3016) = 1 - \frac{\binom{49}{6}!}{\binom{49}{6}^{3016} * \left(\binom{49}{6} - 3016\right)!} = 1 - \prod_{j=1}^{3016-1} \left(1 - \frac{j}{\binom{49}{6}}\right) = 0{,}2776$$

## Siebformel von Poincaré-Sylvester

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} * P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

**Für n = 2:**

$$P(A \cup B) = P(A) + (B) - P(A \cap B)$$

**Für n = 3:**

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

*Beispiele:*

Von 1000 befragen Haushalten besitzen 603 einen CD-Spieler, 634 einen Videorecorder, 478 einen PC, 392 einen CD-Spieler und einen Videorecorder, 322 einen CD-Spieler und einen PC und 297 einen Videorecorder und einen PC. 214 Haushalten gaben an, alle drei Geräte zu besitzen. Wie viele der befragten Haushalte besitzen keiner der drei Geräte?

603 + 634 + 478 – 392 – 322 – 297 + 214 = 918
1000 – 918 = 82

Von 25 Studenten studiert jeder wenigstens eines der Fächer Biologie, Geographie, Chemie. Biologie studieren insgesamt 14, Geographie 10. 2 Studenten haben alle Fächer, 8 Studenten haben mindestens 2 der genannten Fächer belegt. Wie viele Studenten studieren Chemie?

14 + 10 + C – (6 + 3 * 2) + 2 = 25
C = 11

## Koinzidenz-Paradoxon

Die Zufallsvariable $X_n$ sei die Anzahl der Fixpunkte einer zufälligen Permutation von 1,2,…,n, so gilt:

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} * \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(-1)^r}{r!}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fixpunkt existiert, gilt:

$$P(X_n > 0) = 1 - P(X_n = 0) \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$$ , dieser Wert gilt Näherungsweise für n > 6

*Beispiele:*

### Rencontre-Problem

Von zwei Personen hat jede ein Kartenspiel (n = 32 Karten) in der Hand. Nach gutem Mischen decken beide je eine Karte auf. Treffen gleiche Karten zusammen, so hat sich (mindestens) ein Recontre ergeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt?

0,6321

### Lambertsches Problem der vertauschten Briefe

n Briefe werden rein zufällig in n adressierte Umschläge gesteckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag?

0,6321, für n > 6

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \mid B) * P(B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Wenn $\{B_1, \ldots, B_n\}$ eine Menge von paarweise disjunkten Ereignissen, dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) * P(B_i)$$

**Satz von Bayes**

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) * P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i) * P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) * P(B_k)}$$

**Stochastische Unabhängigkeit**

Für stochastisch unabhängige Ereignisse A und B gilt:

$$P(A) = P(A \mid B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

*Beispiele:*

**Ziegenproblem**

Es sind folgende Ereignisse definiert:
$K_A$: Der Kandidat hat das Tor A gewählt…; $M_A$: der Moderator hat das Tor A geöffnet,…; $G_A$: Der Gewinn ist im Tor A,…
Es soll folgende Situation vorliegen: Der Kandidat hat Tor A gewählt und der Moderator hat daraufhin das Tor B geöffnet. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn der Kandidat das Tor wechselt?

$$P(G_C \mid M_B) = \frac{P(M_B \cap G_C)}{P(M_B)} = \frac{P(M_B \mid G_C)P(G_C)}{P(M_B \mid G_A)P(G_A) + P(M_B \mid G_B)P(G_B) + P(M_B \mid G_C)P(G_C)}$$

$$= \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

**Ziegenproblem mit vier Türen**

$$P(G_C \mid M_B) = \frac{P(M_B \mid G_C)P(G_C)}{P(M_B \mid G_A)P(G_A) + P(M_B \mid G_B)P(G_B) + P(M_B \mid G_C)P(G_C) + P(M_B \mid G_D)P(G_D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$$

**Simpson-Paradoxon**

An einer Hochschule gibt es für die Fächer A und B folgende Bewerberzahlen und Zulassungsquoten gegliedert nach Frauen und Männern.

| | Männer | | Frauen | | Insgesamt | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Anz. Bewerber | Zulassungen | Anz. Bewerber | Zulassungen | Anz. Bewerber | Zulassungen |
| Fach A | 400 | 60% | 100 | 80% | 500 | 64% |
| Fach B | 100 | 20% | 400 | 25 % | 500 | 24 % |
| gesamt | 500 | 52% | 500 | 36 % | 1000 | 44 % |

Obwohl sowohl bei Fach A (60%, 80%) als auch bei Fach B (20%, 25%) die Zulassungsquote bei Frauen höher war, als bei Männern, wurden insgesamt weniger Frauen als Männer zugelassen. Dies ist scheinbar widersprüchlich.

Eine Erklärung hierfür ist, dass sich Frauen, im Gegensatz zu Männern, überwiegend für das Fach B beworben haben, für das es generell schwieriger ist, eine Zulassung zu bekommen als für das Fach A.

## Diskrete Zufallsvariablen

**Diskrete Gleichverteilung (Laplace-Verteilung)**

$$X \sim DU(N) \Rightarrow P(X = k) = \frac{1}{N}$$

**Geometrische Verteilung**

$$X \sim GEO(p) \Rightarrow P(X = k) = p * (1-p)^{k-1}$$

**Binomialverteilung**

$$X \sim BIN(n,p) \Rightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

**Poisson-Verteilung (Verteilung seltener Ereignisse)**

$$X \sim POI(\lambda) \Rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Der optimale Wert für λ ist der Erwartungswert.

## Stetige Zufallsvariablen

**Rechteckverteilung**

Für das Intervall [a, b]:

$$X \sim UNIF(a,b) \Rightarrow$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} &, a < t < b \\ 0 &, sonst \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 &, x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} &, a < x < b \\ 1 &, x \ge b \end{cases}$$

**Normalverteilung**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * \exp\left\{ -\frac{1}{2} * \left( \frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} * \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (für negative Argumente)

$\Phi(x) - \Phi(-x) = 2 * \Phi(x) - 1$ (k-Sigma-Grenzen)

Standardisierung einer normalverteilten Zufallsvariable

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X^* := \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Beispiel zur Umrechnung auf die Standardnormalverteilung

Die Körpergröße erwachsener Männer kann als eine N(180,49)-verteilte Zufallsgröße angesehen werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann zwischen 175cm und 190cm groß ist?

$$X \sim N(180,49) \Rightarrow$$

$$P(175 \le X \le 190) = P\left(\frac{175-180}{7} \le \frac{X-180}{7} \le \frac{190-180}{7}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{190-180}{7}\right) - \Phi\left(\frac{175-180}{7}\right) = \Phi(1{,}43) - \Phi(-0{,}71) = \Phi(1{,}43) - (1-\Phi(0{,}71)) = 0{,}68$$

**Exponentialverteilung**

$$X \sim EXP(\lambda) \Rightarrow$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda * t} & ,t > 0 \\ 0 & ,sonst \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda * x} & ,x > 0 \\ 0 & ,sonst \end{cases}$$

## Erwartungswert einer Zufallsvariable

**Für diskrete Zufallsvariablen X**

$$E(X) := \sum_i x_i * P(X = x_i)$$

$$E(g(X)) := \sum_i g(x_i) * P(X = x_i)$$

**Für stetige Zufallsvariablen X**

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx$$

$$E(g(X)) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) * f(x)dx$$

$$E(a * X + b) := a * E(X) + b$$

## Varianz einer Zufallsvariable

**Für diskrete Zufallsvariablen X**

$$VAR(X) := \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - E(X))^2$$

**Für stetige Zufallsvariablen X**

$$VAR(X) := E((X - E(X))^2)$$

$$VAR(X) := E(X^2) - E(X)^2$$

$$VAR(a * X + b) := a^2 * VAR(X)$$

## Symmetrisch verteilte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X heißt symmetrisch zu a verteilt, falls gilt:
$P(X \leq a - x) = P(X \geq a + x)$, für alle $x \geq 0$

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte f, so ist X symmetrisch zu a verteilt, wenn gilt:
$f(a - t) = f(a + t)$

Ist die Zufallsvariable X symmetrisch zu a verteilt und existiert der Erwartungswert E(X), so gilt:
E(X) = a

## Erwartungswert und Varianz einiger Verteilungen

| *Verteilung* | *Symbol* | *Erwartungswert* | *Varianz* |
|---|---|---|---|
| **Diskrete Verteilungen** | | | |
| Diskrete Gleichverteilung | $DU(N)$ | $\frac{N+1}{2}$ | $\frac{N^2+1}{12}$ |
| Geometrische Verteilung | $GEO(p)$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| Binomialverteilung | $BIN(n,p)$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| Poisson-Verteilung | $POI(\lambda)$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| **Stetige Verteilungen** | | | |
| Rechtecksverteilung | $UNIF(a,b)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Normalverteilung | $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| Exponentialverteilung | $EXP(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |

## Über die Statistik…

Die suggestive Kraft des Begriffes „Repräsentativität“ steht in keinem Verhältnis zu seiner tatsächlichen inhaltlichen Leere. *(Prof. Norbert Henze in „Stochastik für Einsteiger“)*

Traue keiner Statistik, die du nicht selbst gefälscht hast. *(Von der Nazipropaganda im Zweiten Weltkrieg erfunden und Winston Churchill zugeschrieben)*

## Anhang: Verteilungsfunktion Φ(x) der Standardnormalverteilung

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| **2,1** | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| **2,2** | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| **2,3** | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| **2,5** | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| **2,6** | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| **3,0** | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| **3,1** | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| **3,2** | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| **3,3** | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| **3,4** | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| **3,5** | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| **3,6** | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| **3,7** | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| **3,8** | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| **3,9** | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |